Početní část 1 - 3.6.2021

1. Najděte maximální řešení rovnice

$$y' - xy = x\sqrt[3]{y},$$

   které splňuje počáteční podmínku

$$y(3) = 1$$

   (10 bodů).

2. Vyšetřete konvergenci mocninné řady (tedy najděte poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci na kružnici konvergence) pro řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^n \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}}{n \ln^2 n} z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

   (8 bodů).

Řešení

1. Jde o Bernoulliovu rovnici s koeficientem $\alpha = \frac{1}{3}$, proto funkce $y = 0$ je řešením, očividně však nesplňuje počáteční podmínku. Dále pracujeme za předpokladu $y \neq 0$.
$$y'y^{-\frac{1}{3}} - xy^{\frac{2}{3}} = x$$
a substituujeme $z(x) = y^{\frac{2}{3}}(x) = \sqrt[3]{y^2}(x)$. Očividně proto hledáme pouze nezáporná $z(x)$. Protože $z'(x) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}(x)y'(x)$ dostáváme
$$\frac{3}{2}z' - xz = x$$
a tedy
$$z' - \frac{2}{3}xz = \frac{2}{3}x.$$
To už je lineární rovnice, najdeme řešení metodou integračního faktoru:
$$\begin{aligned}
P(x) &= \int p(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^2\\
\exp(P(x)) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^2}\\
\int q(x)\exp(P(x))\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int x\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^2} + C\\
\exp(-P(x)) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^2}\\
z(x) &= -1 + C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^2}
\end{aligned}$$
Hledáme nezáporná z, taková nemůžeme dostat pro záporná C vůbec, záporné konstanty tak nejsou povoleny, stejně jako $C = 0$. Pro kladná C navíc potřebujeme zaručit
$$\begin{aligned}
-1 + C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^2} &> 0\\
\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^2} &> C^{-1}\\
\frac{1}{3}x^2 &> \ln C^{-1}
\end{aligned}$$
To je omezující podmínka jen pro $C \in (0, 1]$ a pro taková C pak dostáváme
$$|x| > \sqrt{\ln C^{-3}}$$

Nyní už snadno $y(x) = z^{\frac{3}{2}}(x)$ a proto

$$y(x) = \sqrt{(-1 + C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^2})^3}$$

na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\ln C^{-3}})$ a $(\sqrt{\ln C^{-3}}, \infty)$ pro $C \in (0, 1)$ a na $\mathbb{R}$ pro $C > 1$. V krajních vlastních bodech těchto intervalů lze řešení lepit na triviální řešení $y = 0$. Maximální řešení je proto vždy definované na celém $\mathbb{R}$. Počáteční podmínka nám určí hodnotu konstanty C:

$$1 = \sqrt{(-1 + C\mathrm{e}^3)^3}$$

a odtud $C = 2\mathrm{e}^{-3} < 1$. To nám tedy určuje "pravou"větev řešení, která je definovaná na intervalu $(\sqrt{\ln \frac{\mathrm{e}^9}{8}}, \infty)$. V bodě $x = \sqrt{\ln \frac{e^9}{8}}$ lepíme na triviální řešení.

Levá větev může být dána libovolnou jinou konstantou $C_2 \in (0, 1]$ na intervalu $(-\infty, -\sqrt{\ln C_2^{-3}})$ nebo nemusí být přítomna vůbec a řešení může být pro záporná x triviálně rovno nule.

2. Označíme

$$a_n = (-2)^n \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^p n}$$

a lehce usoudíme, že

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$$

a proto $R = \frac{1}{2}$. Řada tak konverguje absolutně pro taková komplexní z, která splňují $|z| < \frac{1}{2}$ a nekonverguje pro $|z| > \frac{1}{2}$ bez ohledu na hodnotu parametru p. Dále pokračujeme zkoumáním kružnice konvergence, položíme proto $z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\varphi}$, kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dosazením do řady dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^p n} \mathrm{e}^{in\varphi}$$

Zkusíme nejdříve vyšetřit absolutní konvergenci, vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^p n}$$

Tu si za pomocí vzorečku pro $a^2 - b^2$ upravíme na tvar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}) \ln^p n}$$

využijeme limitní srovnávací kritérium. Protože $\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1} \sim n$ pro $n \to \infty$ je konvergence naší řady je ekvivalentní s konvergencí řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n},$$

která (například dle integrálního kritéria) konverguje. Neabsolutní konvergenci už tedy vyšetřovat nemusíme, řada konverguje absolutně a tedy i konverguje na celém kruhu konvergence.